GEOMETRÍA - DÉCIMO

Habilidades 6 y 7

Ministerio de Educación Pública
Departamento de Tercer Ciclo y Educación Diversificada
Asesoría Nacional de Matemática

Roxana Martinez Rodriguez
roxana.martines.rodriguez@mep.go.cr
2022

CICLO DIVERSIFICADO

GEOMETRIA -DÉCIMO

Tabla de contenido

Introducción 1
Habilidades y conocimientos 2
Otros apoyos: 6
Ejercicios 6
Mediación 8
Conocimientos y habilidades previas 9
Soluciones a los ejercicios 10
Referencias 18

Introducción

Se desarrolla a continuación el tema de circunferencia en el plano que corresponde en el programa de estudios de décimo año. Para ello se agrupan las habilidades y se organizan en varios fascículos, al presente fascículo le corresponden las **habilidades 6 y 7** del programa de estudios vigente.

El fascículo contiene el **desarrollo teórico** de las habilidades del programa de estudios indicadas en el párrafo anterior. Este desarrollo contiene, lo deseable que la persona estudiante debe conocer sobre el tema, para que pueda resolver los ejercicios que se le presentan en el contexto costarricense. Dentro del desarrollo teórico se presentan algunos **ejemplos**, pertinentes al tema y acorde con las habilidades.

Se incluyen algunos **ejercicios** que sirven de modelo, para que la persona estudiante oriente su aprendizaje. Puede enriquecer su aprendizaje realizando ejercicios de otros documentos, donde cultive habilidades similares y que puede resolver para mejorar su aprendizaje. Al final del documento se encuentran las **soluciones a los ejercicios** para que la persona estudiante compare sus respuestas y reconozca su aprendizaje. Además se indican los **conocimientos y habilidades previas**, como referencia para que el estudiante consulte en caso de no recordar algo o de necesitar reforzarlo.

Para el docente se incluyen algunos problemas que pueden utilizarse en la mediación pedagógica. Aunque siempre se sugiere utilizar y elaborar problemas acordes al contexto de los estudiantes.

Habilidades y conocimientos

6. Determinar si una recta dada es secante, tangente o exterior a una circunferencia.
7. Representar gráfica y algebraicamente rectas secantes, tangentes y exteriores a una circunferencia.

Conocimientos:
Rectas secantes, rectas tangentes, recta exterior a una circunferencia.

Para determinar si una recta dada es tangente, secante o exterior a la circunferencia, puede hacerse por medio de la representación gráfica o bien, por la representación algebraica; esta última es al resolver una ecuación que se plantea con las ecuaciones de la circunferencia y de la recta.

Por la **representación gráfica** se debe observar:

- *Tangente*: la recta tiene un único punto en común con la circunferencia y es perpendicular al radio que pasa por dicho punto.

- *Secante*: la recta corta a la circunferencia en dos puntos.

- *Exterior*: la recta no tiene punto en común con la circunferencia.

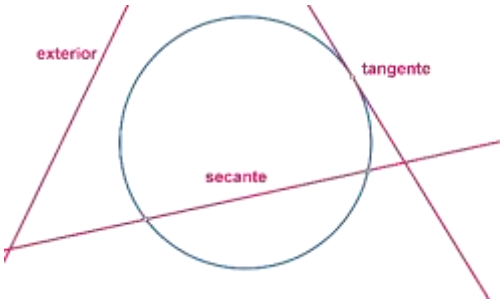


Ilustración 1: Tomado de https://www.edu.xunta.gal/espazoAbalar/sites/espazoAbalar/files/datos/1445431865/contido/ud6/22_posiciones_relativas_entre_una_recta_y_una_circunferencia.html

Por la **representación algebraica** se debe plantear y resolver una nueva ecuación:

Ejemplo 1:

Considere la ecuación de la circunferencia $(x+2)^2+(y-1)^2=4$

Determinar si la recta $y=-3x+1$ es tangente, secante o exterior a ella.

Solución:

$$(x+2)^2+(-3x+1-1)^2=4$$

Se sustituye la ecuación de la recta, en la ecuación de la circunferencia.

$$(x+2)^2+(-3x)^2=4$$

$$x^2+4x+4+9x^2=4$$

Se simplifica la expresión algebraica

$$10x^2+4x=0$$

Se analiza el discriminante de la ecuación resultante.

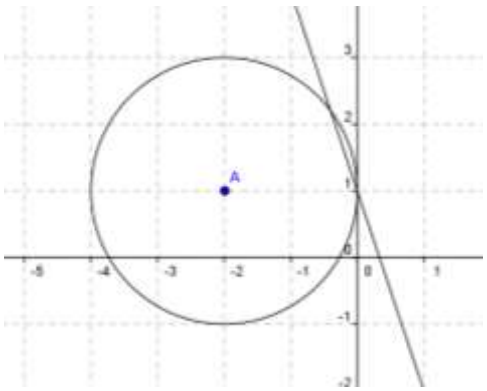
$$b^2-4ac=(4)^2-4\cdot 10\cdot 0=16$$

Si	$b^2-4ac<0$	(negativo) la recta es exterior a la circunferencia
Si	$b^2-4ac>0$	(positivo) la recta es secante a la circunferencia
Si	$b^2-4ac=0$	la recta es tangente a la circunferencia

Respuesta:

En este caso la recta $y=-3x+1$ es secante a la circunferencia $(x+2)^2+(y-1)^2=4$ pues el discriminante es positivo

Gráficamente

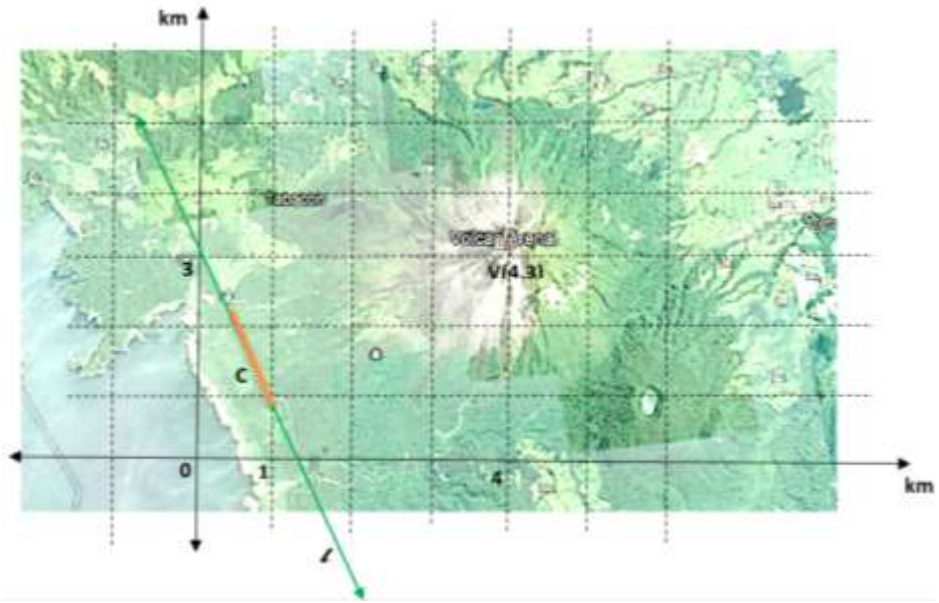


Ejemplo 2:

En el año 1968, el volcán Arenal hizo una erupción que alcanzaron una altura de 200 metros sobre el cráter y una distancia de hasta 2 kilómetros. Un joven que desea analizar la afectación de una carretera, realiza la siguiente representación gráfica.

En ella denota un segmento de la carretera con la letra C. Este segmento de carretera para por la recta ℓ con ecuación y = -2x+3. El cráter del volcán se denota con el punto V, y con coordenadas (4,3).

Si el cráter del volcán se considera el centro de una circunferencia (M), y la erupción pudo alcanzar una distancia máxima de 5 km, la recta donde se coloca el segmento de carretera “C”, ¿queda secante, tangente o exterior a la circunferencia?



Solución:
Para analizar la situación de manera algebraica, debe conocerse la ecuación de la circunferencia, ella se logra conociendo el radio y el centro, por lo que, la ecuación de la circunferencia es

$$(x-4)^2+(y-3)^2=4$$

Ahora se busca si hay intersección o no entre la recta y la circunferencia

$$(x-4)^2+(-2x+3-3)^2=4$$

Se sustituye la ecuación de la recta, en la ecuación de la circunferencia.

$$(x-4)^2+(-2x)^2=4$$

$$x^2-8x+16+4x^2=4$$

$$5x^2-8x+12=0$$

Se simplifica la expresión algebraica, hasta que la ecuación quede igualada a “0”

$$(-8)^2-4(5)(12)=$$

$$64-240=-1764$$

Se analiza el discriminante de la ecuación resultante.

Respuesta:
Como el discriminante es negativo ($\Delta < 0$) la recta es exterior a la circunferencia. Es decir la erupción NO alcanzó el segmento de carretera en mención.

Ejemplo 3:

La ecuación de una circunferencia es $(x+3)^2+(y-1)^2=4$, y la ecuación de una recta es $y=\frac{12}{5}x+3$. ¿Es posible afirmar que la recta es tangente a la circunferencia?

Solución:

$$(x+3)^2+(\frac{12}{5}x+3-1)^2=4$$

Se sustituye la ecuación de la recta, en la ecuación de la circunferencia.

$$(x+3)^2+(\frac{12}{5}x+2)^2=4$$

$$x^2+6x+9+\frac{144}{25}x^2+\frac{48}{5}x+4=4$$

Se simplifica la expresión algebraica, hasta que la ecuación quede igualada a “0”

$$\frac{169}{25}x^2+\frac{78}{5}x+9=0$$

$$\Delta=\left(\frac{78}{5}\right)^2-4\left(\frac{169}{25}\right)9=0$$

Se analiza el discriminante de la ecuación resultante.

Respuesta:
Como el discriminante es “0”, la recta es tangente a la circunferencia.

Otros apoyos:

Videos que le pueden ayudar a comprender el tema: http://juancamate.com/?p=118

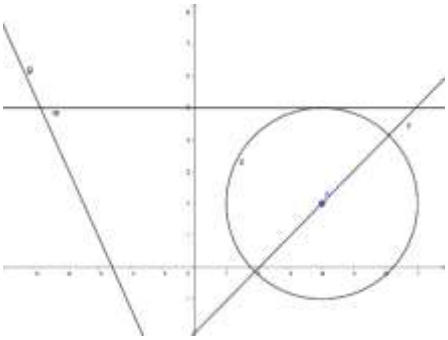
Ejercicios

1. Determine la posición relativa (secante, tangente o exterior) de la recta r respecto a la circunferencia C en cada uno de estos casos:

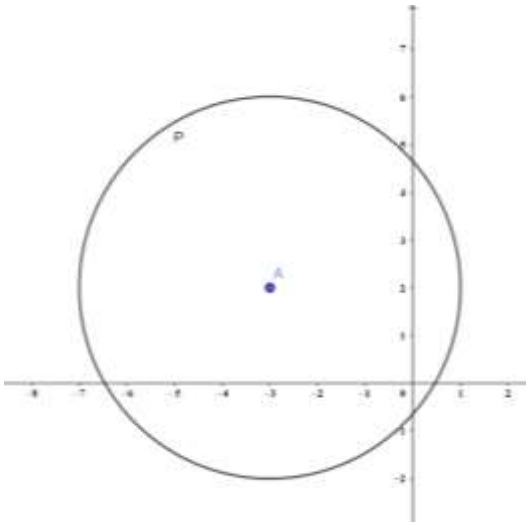
a) y = -2x+7 y C: $(x+4)^2+(y-5)^2=25$
b) y = -x - 1 y C: $(x-1)^2+(y-3)^2=8$
c) $y=-x-3$ y C: $x^2+(y-1)^2=8$
d) r: 3x - 4y - 18 = 0 y C: $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$

2. ¿Es correcto afirmar que la recta 3x + 5y - 2 = 0 es secante a la circunferencia de centro en (2, -1) y de radio 3? Justifique

3. Considere la representación gráfica de la circunferencia "C" de centro "A". De las rectas que están en la representación, denominadas "f", "m" y "g", ¿Cuál (o cuáles) es (son) tangente(s) a la circunferencia? Justifique.



4) Indique al lado de cada recta, la posición relativa (secante, tangente o exterior) que se puede establecer entre estas rectas y la circunferencia "P", representada en la figura adjunta. Justifique su respuesta.



a) $y=\frac{1}{2}x+5$ _____

b) $y=\frac{12}{25}x+5$ _____

c) $y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$ _____

d) $y=\frac{-1}{4}x+\frac{15}{2}$ _____

5)

ZONA DE RIESGO

Manuel y su familia se desplaza en automóvil por una carretera que tiene una trayectoria en línea recta dada por la función lineal y = x -5. Se avisa por la radio que ha sucedido una tragedia y se ha propagado un virus mortal. Por lo cual, se determina poner en cuarentena la zona de riesgo la cual está dada por la ecuación $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 16$.

(Tomado de: Antología de Prácticas para FARO de la UNED).

Según la situación anterior denominada “Zona de Riesgo”, responda:

1. ¿Cuál es la posición relativa de la recta dada por la función lineal y = x -5 con respecto a la circunferencia que determina la zona de riesgo?

2. ¿Manuel y su familia viajan por una vía segura? Explique su respuesta

6) La ecuación de la circunferencia “C” está dada por $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$; además se conoce la recta "k" tangente a “C” en el punto (1, 1). Si el punto P(4, n) es un punto que pertenece a "k" ¿Cuál es la distancia del punto P al centro de la circunferencia?

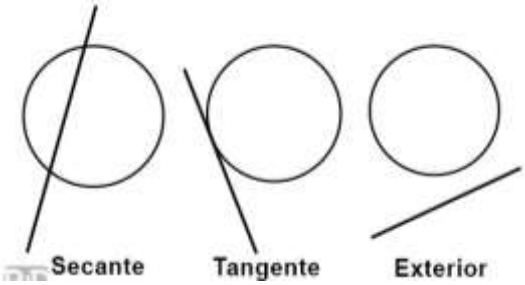
(*Adaptado de “Circunferencia y rectas” de Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica)*

Mediación

Situación (posición relativa)

Entre rectas y circunferencias, es posible establecer 3 tipos de relaciones de posición, a saber: secante, tangente y exterior.

Observe los siguientes dibujos, los cuales representan estas relaciones de posición. Luego responda las preguntas que se le presentan.



Según lo que usted observa:

- ¿Qué características tiene una recta que sea <u>secante</u> a una circunferencia?

- ¿Qué características tiene una recta que sea <u>tangente</u> a una circunferencia?

- ¿Qué características tiene una recta que sea <u>exterior</u> a una circunferencia?

Una variante para la actividad anterior es que:

- Se forman grupos de no más de 5 estudiantes, se nombra a 1 de los estudiantes como relator, y los otros son los que escriben.
- Al relator se le proporciona una imagen con una de las posiciones relativas, esta imagen no se puede mostrar a sus compañeros de subgrupo.
- El relator tiene 2 minutos de tiempo para dar indicaciones a los compañeros del subgrupo, de tal manera que los compañeros realicen el dibujo que se les indica.
- Los compañeros de subgrupo no pueden hablar, ni hacer preguntas, ni mirar el dibujo de los otros compañeros (para ello se les puede sentar en fila)
- Al cabo de 2 minutos se comparan y discuten los dibujos, elaborando entre todos la mejor indicación para realizar el dibujo.

Para el cierre, el docente debe rescatar las observaciones de los estudiantes y con ellas clarificar las nociones de las posiciones relativas de una recta respecto a la circunferencia. Más que la definición, lo importante es que el estudiante, comprenda las posiciones relativas, tanto de manera gráfica como de manera algebraica.

En un primer momento a partir de la representación gráfica, es suficiente con que se concluya:

- *Tangente*: la recta tiene un único punto en común con la circunferencia y es perpendicular al radio que pasa por dicho punto.
- *Secante*: la recta corta a la circunferencia en dos puntos.
- *Exterior*: la recta no tiene punto en común con la circunferencia.

Luego, es necesario desarrollar el proceso algebraico, el cual busca determinar esos puntos de intersección entre la circunferencia y la recta. De tal manera que si tienen 2 puntos de intersección "la recta es secante a la circunferencia", si tienen 1 puntos de intersección "la recta es tangente a la circunferencia", si NO tienen puntos de intersección "la recta es exterior a la circunferencia",

Puede realizar ejemplos como los expuestos en la primera parte de esta sección.

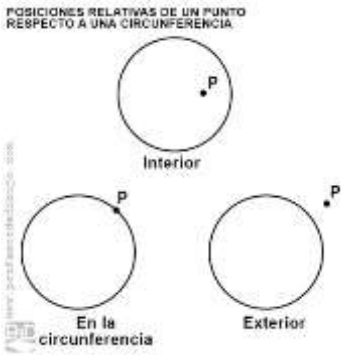
Nota: El programa actual contempla que a partir de dos puntos, o a partir de un punto y la pendiente, se determine la ecuación de la recta, en el tema de Relaciones y Algebra hab 12 de décimo (pag 410), es decir, posterior a la habilidad de Geometría, por lo que, en este momento no se trata de hacer análisis de "m" o de "b", ni de construir la ecuación de la recta. Sin embargo, una vez que se esté desarrollando dicha habilidad, es posible retomar las habilidades de geometría.

Conocimientos y habilidades previas

Posiciones relativas entre un punto y una circunferencia.

Según su posición, un punto puede estar respecto a una circunferencia:

- Interior: el punto está dentro de la circunferencia.
- En la circunferencia: el punto es uno de los puntos de la circunferencia.
- Exterior: el punto está fuera de la circunferencia.



¿Cómo determinar si un punto es interior, exterior o está en la circunferencia?

Ecuación para calcular la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano

$$d\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Soluciones a los ejercicios

1) a) y = -2x+7 y C: $(\boldsymbol{x}+\mathbf{4})^{\mathbf{2}} + (\boldsymbol{y}-\mathbf{5})^{\mathbf{2}} = \mathbf{25}$

Algebraicamente

$(x+4)^2 + (-2x+7-5)^2 = 25$

$(x+4)^2 + (-2x+2)^2 = 25$

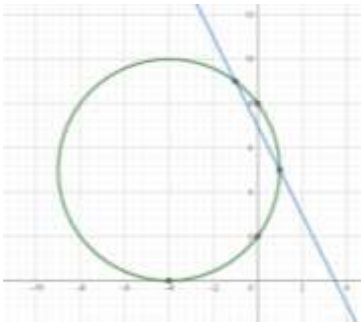
$x^2 + 8x + 16 + 4x^2 - 8x + 4 = 25$

$5x^2 - 5 = 25$

$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4(5)(-5) = 100$

Como $\Delta > 0$ la recta es **secante** a la curva

Gráficamente



1) b) y = -x - 1 y C: $(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})^{\mathbf{2}}+(\boldsymbol{y}-\mathbf{3})^{\mathbf{2}}=\mathbf{8}$

Algebraicamente

$(x-1)^2+(-x-1-3)^2=8$

$(x-1)^2+(-x-4)^2=8$

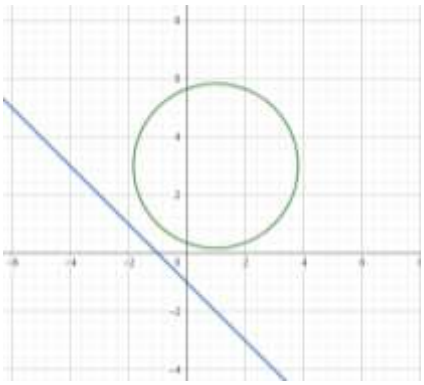
$x^2-2x+1+x^2+8x+16=8$

$2x^2+6x+9=0$

$\Delta= b^2-4ac=6^2-4(2)(9)=36-72=-36$

Como $\Delta< 0$ la recta es **exterior** a la curva

Gráficamente



1) c) $\boldsymbol{y}=-\boldsymbol{x}-\mathbf{3}$ **y C:** $\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+(\boldsymbol{y}-\mathbf{1})^{\mathbf{2}}=\mathbf{8}$

Algebraicamente

$x^2+(-x-3-1)^2=8$

$x^2+(-x-4)^2=8$

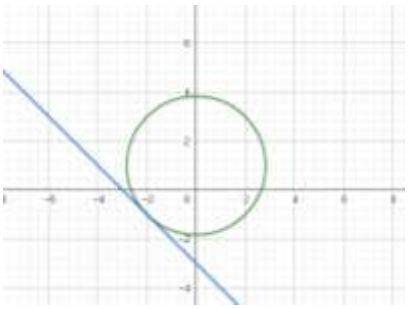
$x^2+x^2+8x+16=8$

$2x^2+8x+8=8$

$\Delta= b^2-4ac=8^2-4(2)(8)=64-64=0$

Como $\Delta= 0$ la recta es **tangente** a la curva

Gráficamente



Nota: En este caso en particular la representación gráfica no es suficiente para garantizar que la recta es tangente a la curva, debe realizarse la comprobación algebraica

1) d) r: 3x - 4y - 1 = 0 y C: $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$

Algebraicamente

$3x - 4y = 1$

3x - 4y - 1 = 0

$4y = 3x - 1$

$y = \frac{3x - 1}{4}$

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$$

$$x^2 + \left(\frac{3x - 1}{4}\right)^2 - 6x - 8\left(\frac{3x - 1}{4}\right) = 0$$

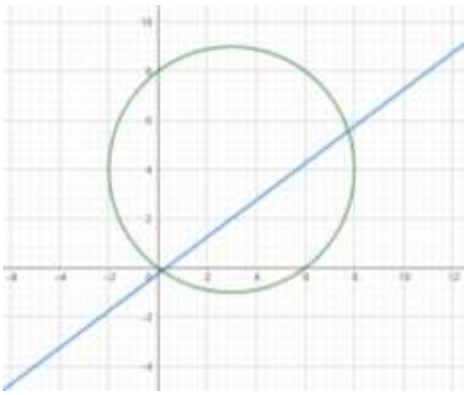
$$x^2 + \frac{9x^2 - 6x + 1}{16} - 6x - 6x + 2 = 0$$

$$16x^2 + 9x^2 - 6x + 1 - 192x + 32 = 0$$
$$25x^2 - 198x + 33 = 0$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 198^2 - 4(25)(33) = 39\,204 - 3300 = 35904$

Como $\Delta > 0$ la recta es **secante** a la curva

Gráficamente



2.

La información que tenemos:

- ecuación de una recta 3x + 5y - 2 = 0,

- datos de una curva centro en (2, -1) y de radio 3

La pregunta: Nos piden determinar si la recta es secante a la curva

Si la curva es de centro en (2, -1) y de radio 3, la ecuación de la curva es

$$(x-2)^2+(y+1)^2=9$$

Se despeja “y” de la ecuación de la recta 3x + 5y - 2 = 0

$$y=\frac{-3x+2}{5}$$

Entonces

$$(x-2)^2+\left(\frac{-3x+2}{5}+1\right)^2=9$$

$$(x-2)^2+\left(\frac{-3x+7}{5}\right)^2=9$$

$$x^2-4x+4+\frac{9x^2-42x+49}{25}=9$$

$$25x^2-100x+100+9x^2-42x+49=205$$

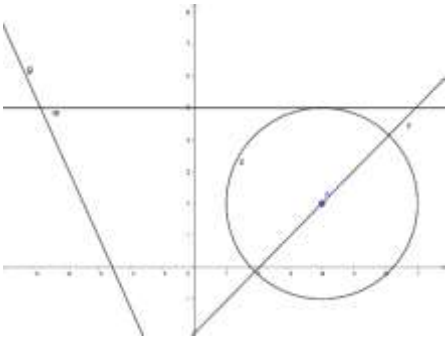
$$34x^2-142x+156=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=142^2-4(34)(156)=20\,164-21\,216=-1052$$

Como $\Delta<0$ la recta es exterior a la circunferencia.

Respuesta: La recta no es secante a la curva, es exterior.

3.



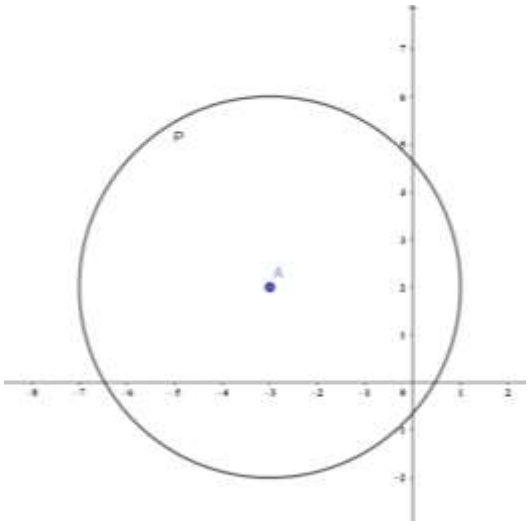
Primero se debe estar claro en lo que se solicita responder, en este caso es indicar de acuerdo con la representación gráfica que una recta es tangente a una circunferencia.

Luego debemos considerar las “herramientas” o conocimientos con que contamos para responder, en este caso es observar en cuántos puntos, toca cada recta a la circunferencia.

Una recta que sea tangente a la circunferencia, la toca únicamente en “1” punto, en este caso solamente la recta “m” cumple esto. Por lo que la respuesta sería la recta *m.*

---

4)



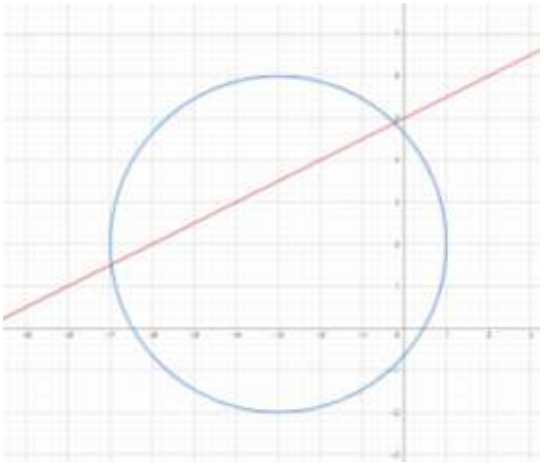
Para dar respuesta podemos seguir el proceso algebraico o el gráfico, el estudiante puede elegir cualquiera de los dos procesos, aunque acá se muestren ambos.

Para resolverlo de manera algebraica se debe determinar la ecuación de la circunferencia, para lo cual se observa en la circunferencia que el centro es (-3, 2) y el radio es 4, con ello se plantea

$$(x - -3)^2 + (y - 2)^2 = 4^2$$

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$$

a)



$$(x + 3)^2 + \left(\frac{1}{2}x + 5 - 2\right)^2 = 16$$

$$(x + 3)^2 + \left(\frac{1}{2}x + 3\right)^2 = 16$$

$$x^2 + 6x + 9 + \frac{1}{4}x^2 + 3x + 9 = 16$$

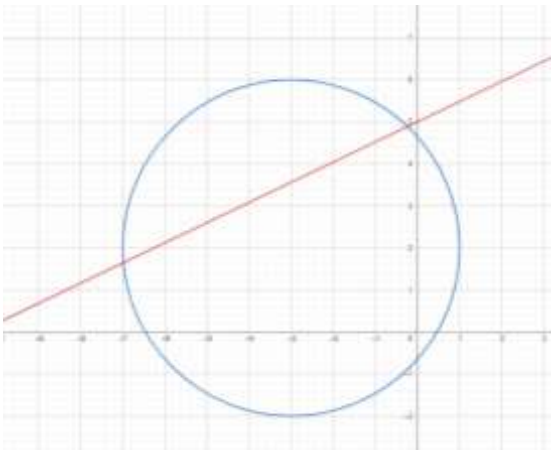
$$\frac{5}{4}x^2 + 9x + 2 = 0$$

$$\Delta = 9^2 - 4\left(\frac{5}{4}\right)(2) = 81 - 10 = 71$$

Como $\Delta > 0$ la recta es secante a la circunferencia

R/ $y = \frac{1}{2}x + 5$ SECANTE

b)



$$(x + 3)^2 + \left(\frac{12}{25}x + 3\right)^2 = 16$$

$$x^2 + 6x + 9 + \frac{144}{625}x^2 + \frac{72}{25}x + 9 = 16$$

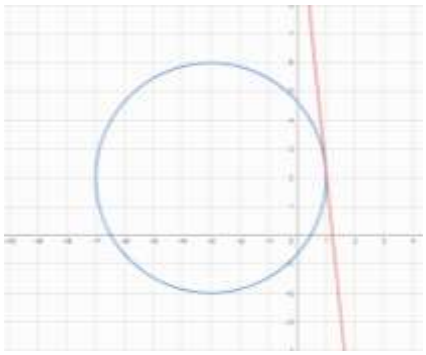
$$\frac{769}{625}x^2 + \frac{222}{25}x + 2 = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{222}{25}\right)^2 - 4\left(\frac{769}{625}\right)(2) = \frac{49284}{625} - \frac{6152}{625} = \frac{43\,132}{625}$$

Como $\Delta > 0$ la recta es secante a la circunferencia

R) $y = \frac{12}{25}x + 5$ SECANTE

c)



$$(x+3)^2 + \left(\frac{3}{4}x - \frac{3}{4} - 2\right)^2 = 16$$

$$(x+3)^2 + \left(\frac{3}{4}x - \frac{11}{4}\right)^2 = 16$$

$$x^2 + 6x + 9 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{33}{8}x + \frac{121}{16} = 16$$

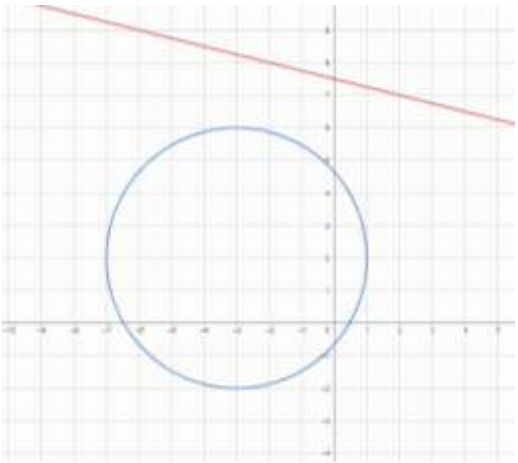
$$\frac{25}{16}x^2 - \frac{15}{8}x + \frac{9}{16} = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{15}{8}\right)^2 - 4\left(\frac{25}{16}\right)\left(\frac{9}{16}\right) = \frac{225}{64} - \frac{225}{64} = 0$$

Como $\Delta = 0$ la recta es tangente a la circunferencia

$y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$ TANGENTE

d)



$$(x+3)^2 + \left(\frac{-1}{4}x + \frac{15}{2} - 2\right)^2 = 16$$

$$(x+3)^2 + \left(\frac{-1}{4}x + \frac{11}{2}\right)^2 = 16$$

$$x^2 + 6x + 9 + \frac{1}{16}x^2 - \frac{11}{4}x + \frac{121}{4} = 16$$

$$\frac{17}{16}x^2 - \frac{13}{4}x + \frac{93}{4} = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{13}{4}\right)^2 - 4\left(\frac{17}{16}\right)\left(\frac{93}{4}\right) = \frac{169}{16} - \frac{1581}{16} = \frac{-1412}{16}$$

Como $\Delta < 0$ la recta es exterior a la circunferencia

R/ $y = \frac{-1}{4}x + \frac{15}{2}$ EXTERIOR

5)

ZONA DE RIESGO

Manuel y su familia se desplaza en automóvil por una carretera que tiene una trayectoria en línea recta dada por la función lineal y = x - 5. Se avisa por la radio que ha sucedido una tragedia y se ha propagado un virus mortal. Por lo cual, se determina poner en cuarentena la zona de riesgo la cual está dada por la ecuación $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 16$.

(Tomado de: Antología de Prácticas para FARO de la UNED).

Según la situación anterior denominada "Zona de Riesgo", responda:

1. ¿Cuál es la posición relativa de la recta dada por la función lineal y = x -5 con respecto a la circunferencia que determina la zona de riesgo?

   $(x - 3)^2 + (x - 5 + 1)^2 = 16.$

   $(x - 3)^2 + (x - 4)^2 = 16.$

   $x^2 + 6x + 9 + x^2 – 8x + 16 = 16.$

   $2x^2 - 2x + 9 = 0$

   $\Delta = 2^2 - 4(2)(9) = -68$

   R/ Como $\Delta < 0$ la recta es exterior a la circunferencia, es decir la carretera por la que transitan no pasa por la zona de riesgo.

   2. ¿Manuel y su familia viajan por una vía segura? Explique su respuesta

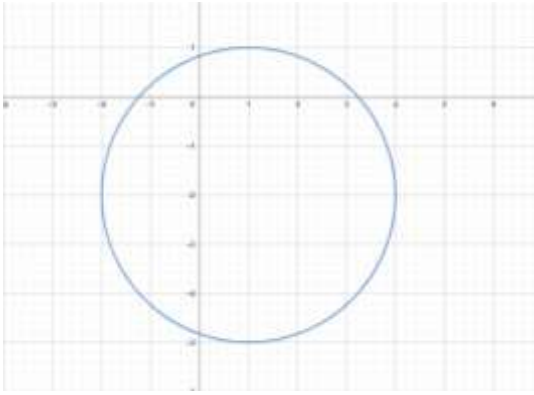
   R/ Manuel y su familia si viajan por una vía segura, fuera de la zona de riesgo.

6) La ecuación de la circunferencia "C" está dada por $(x-1)^2+(y+2)^2=9$; además se conoce la recta "k" tangente a "C" en el punto (1, 1). Si el punto P(4, n) es un punto que pertenece a "k"¿Cuál es la distancia del punto P al centro de la circunferencia?
(*Adaptado de "Circunferencia y rectas" de Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica)*

Datos:

Ecuación de la circunferencia $(x-1)^2+(y+2)^2=9$
"k" tangente a "C" en el punto (1, 1).
P(4, n) es un punto que pertenece a "k"

Pregunta**:**
¿Cuál es la distancia del punto P al centro de la circunferencia?



Al realizar una gráfica de la circunferencia, se observa que la tangente que pase por el punto (1, 1), es horizontal, por lo que m=0
Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente debe ser Y=1
El punto P debe tener coordenadas (4,1)
El centro de la circunferencia es (1, -2)

$$d=\sqrt{(4-1)^2+(1--2)^2}=\sqrt{18}=2\sqrt{3}$$

R/ La distancia del punto P al centro de la circunferencia es $2\sqrt{3}$

Referencias

file:///C:/Users/Caribe/Downloads/Ejercicios%20de%20c%C3%ADrculo%20y%20circunferencia.pdf

https://www.edu.xunta.gal/espazoAbalar/sites/espazoAbalar/files/datos/1445431865/contido/ud6/22_posiciones_relativas_entre_una_recta_y_una_circunferencia.html

UNED, CONED. (2019) *Antología de Prácticas para FARO* https://coned.uned.ac.cr/images/documentos/decimo/faro/MATERIAL_FARO_MATEM%C3%81TICA_CONED.pdf

Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica. Circunferencia y rectas. https://www.reformamatematica.net/wp-content/uploads/2018/10/20181015-Solucionario-G-circunferencias-y-rectas.pdf

Erick Pizarro Carrillo, Danny Ramírez Lobo. 2017 *Desarrollo de habilidades de geometría analítica con Geogebra en décimo año*. http://funes.uniandes.edu.co/20156/1/Pizarro2017Desarrollo.pdf