MATEMÁTICA
GEOMETRÍA DÉCIMO

Hab 1 a la 5

Ministerio de Educación Pública
Departamento de Tercer Ciclo y Educación Diversificada

Roxana Martinez Rodriguez
roxana.martinez.rodriguez@mep.go.cr
2022

CICLO DIVERSIFICADO

GEOMETRIA -DÉCIMO

Contenido

Introducción 1
Habilidades y conocimientos 2
Otros apoyos 5
Ejercicios 6
Sugerencias para la mediación 9
Conocimientos previos 13
Referencias 14
SOLUCIÓN A EJERCICIOS 15

Introducción

Se presenta el tema de circunferencia en el plano para décimo año, en lo que corresponde a las habilidades 1 a la 5 del programa de estudios vigente. Se agrupan las habilidades del programa de estudios, aprovechando la integralidad que tiene el tema.

El presente fascículo pretende mostrar cuales son los conocimientos necesarios en las habilidades indicadas, para lo cual, en primera instancia se hace una exposición de los mismos, seguida por algunos ejercicios y problemas para desarrollar el aprendizaje. Las soluciones los ejercicios y problemas también se incluyen.

En cuanto a la mediación necesaria para lograr los aprendizajes, se incluye una propuesta como apoyo al docente, la cual es únicamente una sugerencia.

Los conocimientos y habilidades previas, que se suponen logradas en la Educación General Básica, se indican al final del documento, como referencia para que el estudiante consulte en caso de no recordar algo o de necesitar reforzarlo.

Elaborado por Roxana Martínez Rodríguez. Asesora de Matemática. 2022

Habilidades y conocimientos

Habilidades

1. Representar gráficamente una circunferencia dado su centro y su radio.
2. Representar algebraicamente una circunferencia dado su centro y su radio.
3. Aplicar traslaciones a una circunferencia.
4. Resolver problemas relacionados con la circunferencia y sus representaciones.
5. Determinar gráfica y algebraicamente si un punto se ubica en el interior o en el exterior de una circunferencia.

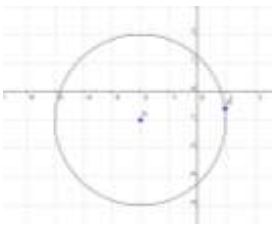
Conocimientos:

Circunferencia: centro, radio

1) Representar una circunferencia

1.1 Circunferencia de centro B(-2,-1) y radio 3

Representación gráfica

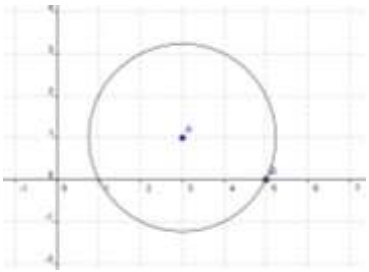


Representación algebraica

$$(x+2)^2+(y+1)^2=9$$

1.2 Circunferencia de centro A(3,1) y radio $\sqrt{2}$

Representación gráfica

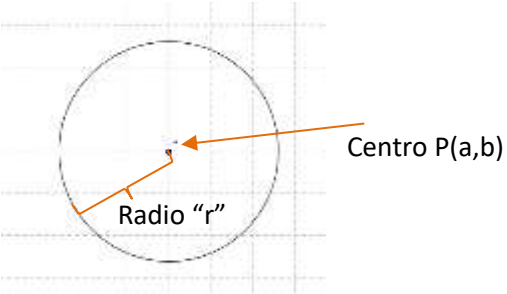


Representación algebraica

$$(x-3)^2+(y-1)^2=2$$

1.3 Circunferencia de centro P(a,b) y radio “r”

Representación gráfica



Representación algebraica

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

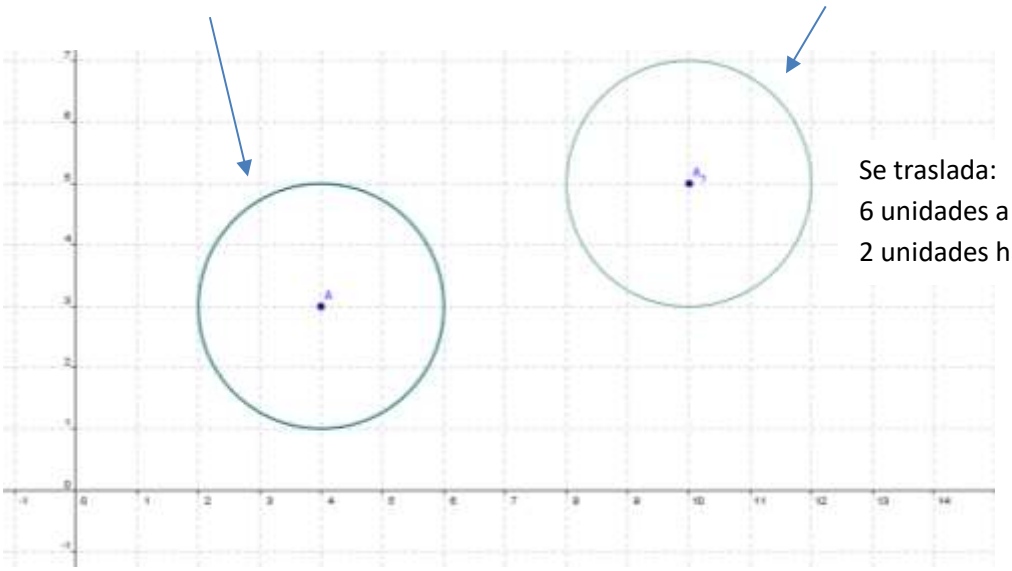
2. Traslación de una circunferencia.

	Norte Arriba ↑	
Oeste Izquierda ←		Este Derecha →
	Sur Abajo ↓	

2.1 Ejemplos

Circunferencia:
centro A(4,3), radio 2

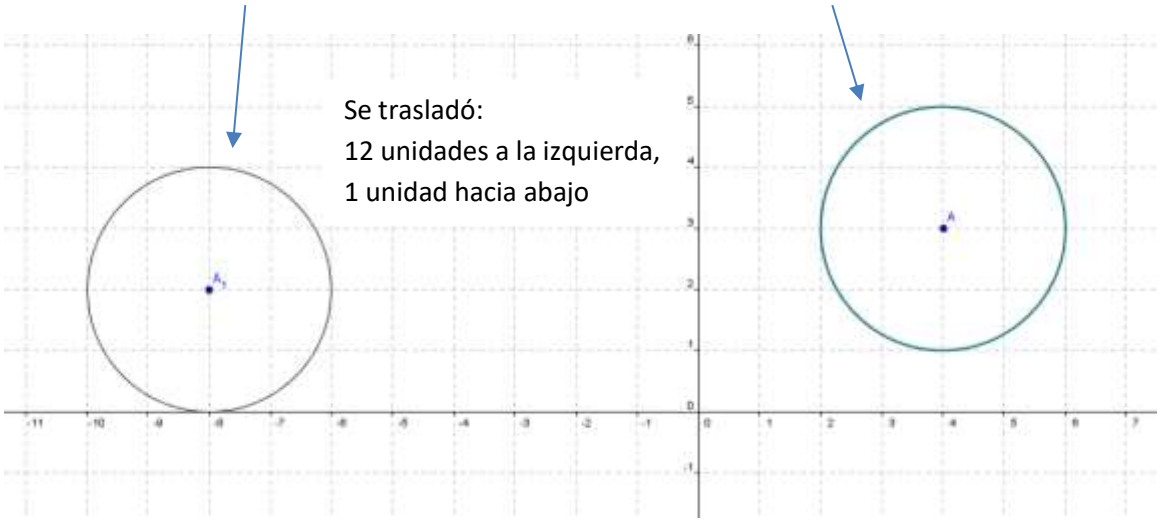
Circunferencia trasladada:
centro A_1(10,5), radio 2



Se traslada:
6 unidades a la derecha,
2 unidades hacia arriba

Circunferencia trasladada:
centro $A_1(-8,2)$, radio 2

Circunferencia:
centro A(4,3), radio 2



Nota:

Mediante la traslación de una circunferencia, se obtiene otra circunferencia (homóloga) de igual radio, que tiene como centro el punto homólogo al centro de la circunferencia original.

3. Punto interior o punto en el exterior de una circunferencia.

Punto interior a la circunferencia:

$$(x+2)^2+(y-3)^2=9$$

Ecuación de circunferencia con centro (-2, 3) y radio 3

$$(-2+2)^2+(1-3)^2 \ ? \ 9$$

Para determinar si el punto B(-2,1) es interior a la circunferencia se sustituyen los valores de “x” y de “y”

$$(0)^2+(-2)^2 \ ? \ 9$$

$$0 + 4 < 9$$

Como el resultado del lado izquierdo es MENOR que el lado derecho, el punto (-2,1) es INTERIOR a la circunferencia.

Punto exterior a la circunferencia:

$$(x+2)^2+(y-3)^2$$

Ecuación de circunferencia con centro (-2, 3) y radio 3

$$(1+2)^2+(3-4)^2 \ ? \ 9$$

Para determinar si el punto C(1,4) es exterior a la circunferencia se sustituyen los valores de “x” y de “y”

$$(3)^2+(1)^2 \ ? \ 9$$

$$9 + 1 > 9$$

Como el resultado del lado izquierdo es MAYOR que el lado derecho, el punto (1,4) es EXTERIOR a la circunferencia.

Nota: Un punto que está en la circunferencia cumple la igualdad. Ejemplo

$$(x+2)^2+(y-3)^2=9$$

Ecuación de circunferencia con centro (-2, 3) y radio 3

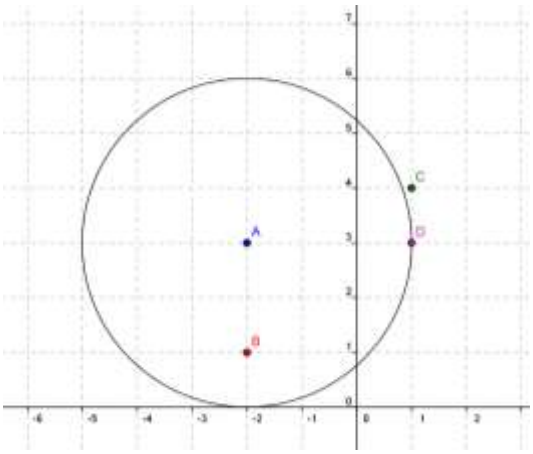
$$(1+2)^2+(3-3)^2=9$$

Para determinar si el punto D(1,3) está en la circunferencia se sustituyen los valores de “x” y de “y”

$$(3)^2+(0)^2=9$$

$$9=9$$

GRAFICAMENTE



Otros apoyos

Ecuación de la circunferencia:
https://www.youtube.com/watch?v=vQg3OSrR_Mw

Punto interior o exterior a una circunferencia:
https://www.youtube.com/watch?v=Gg-bzktYsLQ

Traslación de una circunferencia:
https://www.youtube.com/watch?v=NC225Rgya94

Elaborado por Roxana Martínez Rodríguez. Asesora de Matemática. 2022

Ejercicios

1) Represente gráficamente la circunferencia de centro A(2,-3) y radio 4.

2) Represente algebraicamente la circunferencia de centro A(2,-3) y radio 4.

3) A partir de la representación gráfica que se le presenta, indique el centro y el radio de la circunferencia.

4) A partir de la representación gráfica que se le presenta, indique la ecuación de la circunferencia.

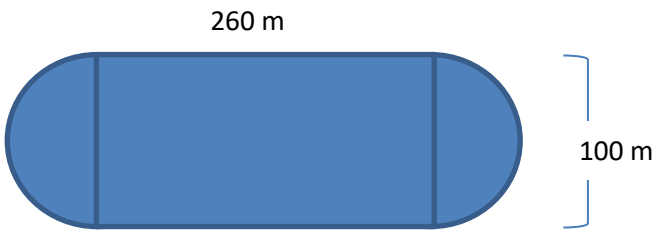
5) Los extremos del diámetro de una circunferencia son los puntos A(-5,-1) y B(3,-1). ¿Cuál es la ecuación de esta circunferencia?

6) Un servicio de sismología, detectó un sismo con origen, 5 km este y 3 sur del centro de la ciudad de Punta Luz, con un radio de 4 km a la redonda ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia del área afectada? Utilizando esta ecuación es posible que el sismo haya afectado el centro de la ciudad de Punta Luz.

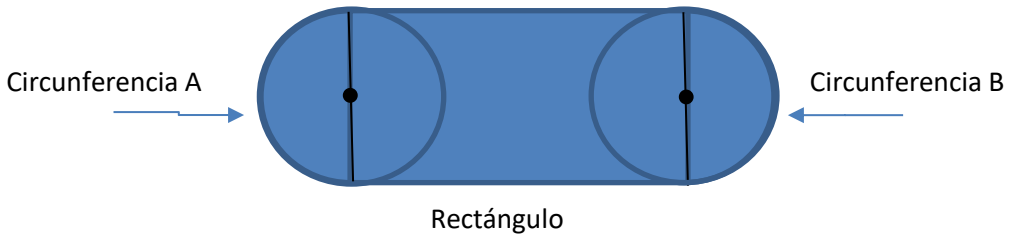
7) Halle la ecuación de una circunferencia cuyo centro es (1, -1), y pasa por el punto (3, 5)

8) El área de una circunferencia en 25π encuentra la ecuación general si es tangente a los ejes coordenados en el segundo cuadrante.

9) Se conoce que las dimensiones en la parte interna de una pista de atletismo son como se muestra en la figura



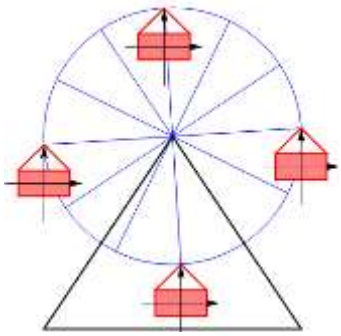
Con el propósito de realizar algunas mejoras, un joven la dibuja sobre un plano cartesiano, para lo cual la descompone que se muestra en la figura



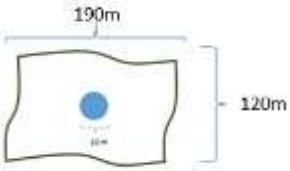
Si el centro de la circunferencia A lo ubica en el punto (50,50) ¿Dónde se ubicaría el centro de la circunferencia B?

10) Dado el punto N(2,4) y la circunferencia C:=$(x-2)^2+(y-4)^2=25$. Determine el área del triángulo suyos vértices son N, y las intersecciones de C con el eje de las abscisas.

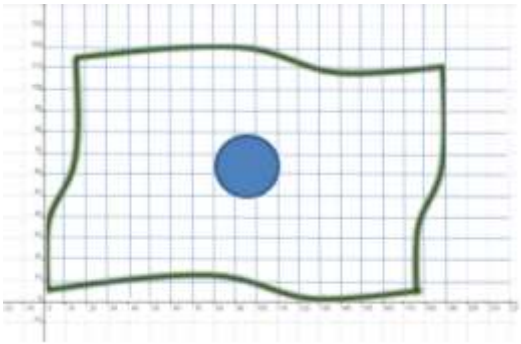
11) El dibujo adjunto representa una rueda de chicago, con diámetro interior de la circunferencia de 20 metros, si se coloca el centro de la circunferencia en el origen de un plano cartesiano, cuáles son las coordenadas de los puntos donde están los carritos
Si se traslada el centro de la circunferencia al punto (10,-30), a que puntos se trasladan cada uno de los carritos.



12) En el pueblo de Corona hay un parque como el que se muestra en la figura, tiene un lago en el centro de forma circular y con diámetro 30 m, el resto del parque es zona verde.



Se desean colocar aspersores de agua para regar la zona verde, los aspersores con los que se cuenta cubren un radio máximo de 40 metros.

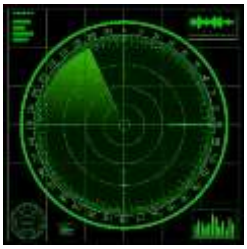


Para analizar la situación el encargado del parque, representa la situación en un plano cartesiano, colocando una de las esquinas en el origen del plano, como muestra la figura.

Utilizando las coordenadas del plano:

a) sugiera al encargado del parque, dónde colocar aspersores. Justifique su respuesta.
b) si se solicita que los aspersores no rieguen el lago, sugiera dónde colocarlos. Justifique su respuesta.
c) si solamente se cuenta con 1 aspersor, el cual debe trasladarse cada cierto tiempo, y el encargado lo coloca en un primer tiempo, en el punto (40,40), cuántos metros hacia arriba, abajo, derecha o izquierda, debe trasladarse el aspersor para trasladarlo en un segundo momento. Justifique su respuesta.

13) Un avión tiene un radar, que en determinado momento tiene un alcance máximo de 5000 metros, para realizar un estudio, un observador dibuja la situación en el plano cartesiano, colocando el punto de observación en el origen.



a) Si el avión transita por el punto de coordenadas A(15000, 12000), escriba la ecuación que representa el alcance del radar.

b) Si una montaña se ubica en el punto M(8000, 6000) ¿Es posible que la montaña sea detectada por el radar del avión, cuando el mismo transita por el punto A(15000, 12000)? Resuelva de manera algebraica.

c) ¿Cuál es una posible posición del avión, para que el observador quede dentro del área de alcance del radar? Indique cuál debe ser la traslación del avión, desde la posición A(15000, 12000), hasta la posición del ejercicio “b” (donde el observador queda alcance del radar).

Sugerencias para la mediación

1. Representación de la circunferencia, puntos interiores y exteriores.

Situación

Se presenta a continuación las coordenadas de los puntos A, B, C, D. E y F, con ellos usted debe realizar las acciones que se le solicitan, luego de ello, observar e indicar la regularidad que se observa con los cálculos realizados.

A(3, 2), B(0, 2), C(3, 0), D$\left(4, 2+2\sqrt{2}\right)$, E$\left(3+2\sqrt{2}, 1\right)$, F$\left(3-2\sqrt{2}, 1\right)$

i) Calcule las distancias entre puntos que se solicitan,

$d(A,B) =$

$d(A,D) =$

$d(A,C) =$

$d(A,E) =$

$d(A,F) =$

ii) Coloque los puntos en un plano cartesiano.

¿Qué regularidad observa con los datos calculados?. Explique.

A partir de estos cálculos, en la etapa de cierre de la actividad, se llega a la conclusión de que los puntos B, C, D, E y F, pertenecen al círculo de radio 3 y centro A(2,3), dado que la distancia de ellos a A, es 3.

En general, para calcular las distancias solicitadas, se utiliza la ecuación

$$\sqrt{(3-x)^2+(2-y)^2} = d$$

Que es equivalente a $(3-x)^2+(2-y)^2 = d^2$

Lo que da pie a introducir la ecuación de la circunferencia de centro (x_1, y_1) y radio "r"

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2 = r^2$$

Indique a que se le llama la representación gráfica de la circunferencia y a qué la representación algebraica (o analítica). Y dónde se observan el centro y el radio en ambas representaciones.

Realice ejemplo donde:

- a partir del centro y el radio, realicen la representación gráfica.

- determine en la representación gráfica y en algebraica el centro y el radio.

- a partir de la representación gráfica, realice la representación algebraica y viceversa.

Situación

Se presenta a continuación las coordenadas de los puntos A, G, H, K, M, con ellos usted debe realizar las acciones que se le solicitan, luego de ello, observe e indique la regularidad que se observa en los cálculos realizados.

A(3, 2), G(2,4), H(4,0), K$(0,4)$, M$(4,-1)$

i) Calcule las distancias entre puntos que se solicitan,

$d(A,G) =$

$d(A,H) =$

$d(A,K) =$

$d(A,M) =$

ii) Dibuje en un plano cartesiano la circunferencia con centro A(3,2) y radio 3. Además de los puntos G, H, K y M.

¿Qué regularidad observa con los datos calculados? Explique.

Con esta actividad se espera que el estudiante observe que hay dos puntos cuyas distancias al punto A, son mayores que el radio y que están fuera de la circunferencia, además de otros dos cuyas distancias al punto A, son menores que el radio y que están dentro de la circunferencia.

Algunas indicaciones o preguntas que pueden ayudar a los estudiantes a obtener la conclusión son:

- Ordene de menor a mayor, los resultados.
- Compare los resultado con el radio de la circunferencia “3”

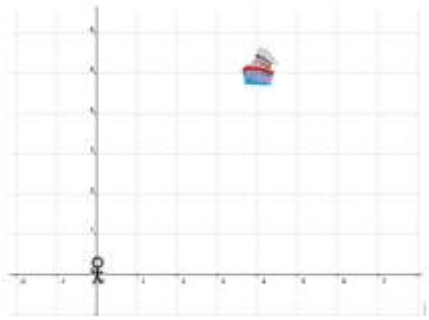
2. Traslación de una circunferencia.

Situación

Un barco de rescate se encuentra en alta mar en la búsqueda de una persona. Supongamos que dicha persona está en el origen, y el barco se encuentra 50 km al norte y 40 km al oeste. El capitán del barco, con su telescopio, tiene un radio de visión de 20 km. ¿Podrá visualizar en este momento a la persona?

Si el barco se traslada 80 km al sur, luego 50 km al este. Entonces ¿se visualiza la persona desde este punto?

Si de este nuevo punto, se desplaza ahora 20 km al norte ¿Logrará divisar el punto en alta mar donde se encuentra la persona? ¿A qué distancia se encuentra el barco de la persona a rescatar?



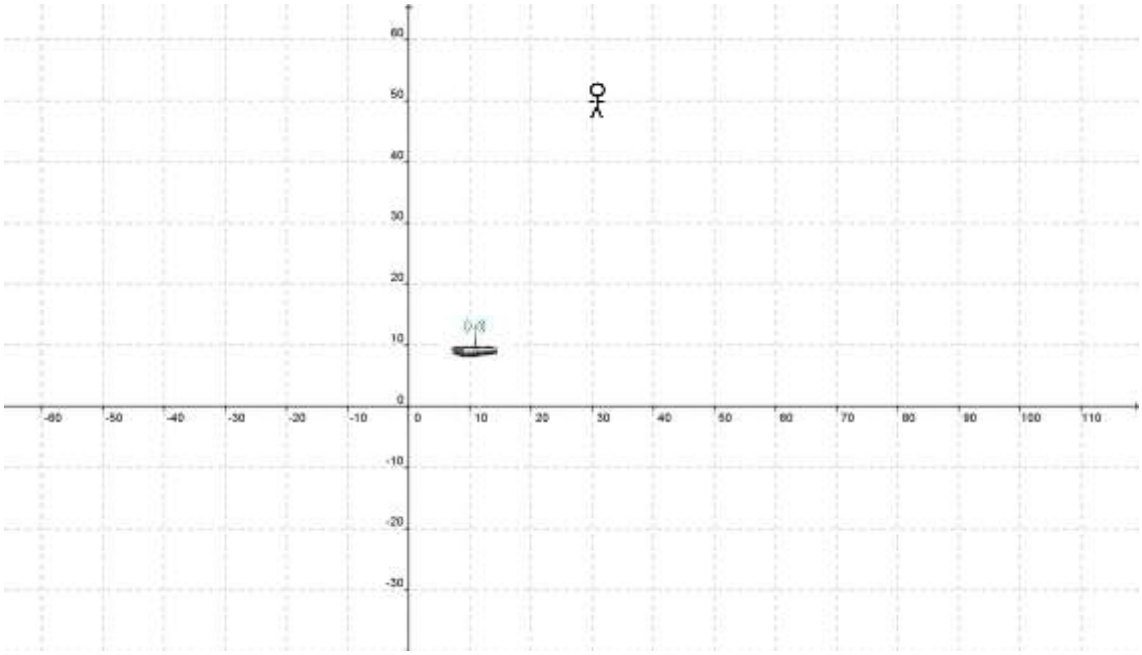
Tomado de Pizarro y Ramírez

En el cierre de la actividad, lleve al estudiante a reconocer que para realizar las traslaciones se suman o se restan los datos, al par ordenado que corresponde al centro de la circunferencia y el radio se mantiene.

3. Punto interior o punto en el exterior de una circunferencia.

Situación

Un rauter colocado en la oficina del director de un centro educativo, emite una señal de Wifi, que tiene un alcance de 30 metros en interiores. Para analizar la situación un joven dibuja un plano cartesiano y coloca el rauter en el punto (10,10), conoce que su posición en el plano corresponde al punto (30, 50), ¿logra este joven conseguir la señal del rauter?, Si no lo logra, a qué punto debe moverse el joven para lograr la señal? Otro chico que este en el punto (-20,40), recibe la señal?



Conocimientos previos

La **circunferencia** es una línea curva cerrada, cuyos puntos equidistan de otro punto llamado centro.

Los principales elementos de una circunferencia son:

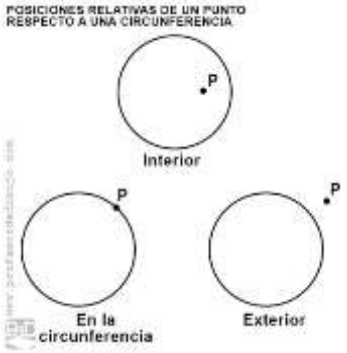
- Arco: porción de la circunferencia comprendida entre dos de sus puntos.
- Centro: punto desde el que se sitúan a igual distancia todos los puntos de la circunferencia.
- Radio: segmento situado entre el centro de la circunferencia y cualquier punto de esta.
- Cuerda: Segmento que une dos puntos de una circunferencia. Divide a la circunferencia en dos arcos. La mayor cuerda de una circunferencia sería el diámetro.
- Diámetro: segmento delimitado por dos puntos de una circunferencia y que pasa por el centro. Su medida sería dos veces la del radio. El diámetro divide la circunferencia en dos partes iguales llamadas semicircunferencias.
- Semicircunferencia: arco comprendido por media circunferencia.

Posiciones relativas entre un punto y una circunferencia.

Según su posición, un punto puede estar respecto a una circunferencia:

- Interior: el punto está dentro de la circunferencia.
- En la circunferencia: el punto es uno de los puntos de la circunferencia.

- Exterior: el punto está fuera de la circunferencia.



¿Cómo determinar si un punto es interior, exterior o está en la circunferencia?

Ecuación para calcular la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano

$$d\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Referencias

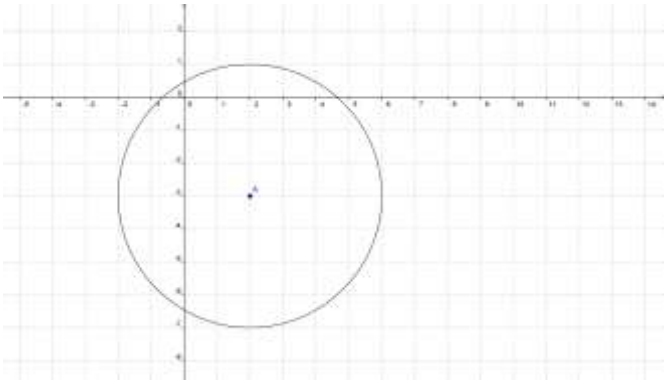
Erick Pizarro Carrillo, Erick, Ramírez Lobo, Danny. 2017. *Desarrollo de habilidades de geometría analítica con Geogebra en décimo año*. http://funes.uniandes.edu.co/20156/1/Pizarro2017Desarrollo.pdf

Rodríguez Marín, María del Carmen. 2014. *Problemas Sobre Geometría Relaciones Métricas en la Circunferencia. Lugares Geométricos*. https://www.ugr.es/~anillos/textos/pdf/2014/Geometria1.pdf

SOLUCIÓN A EJERCICIOS

1) Represente gráficamente la circunferencia de centro A(2,-3) y radio 4

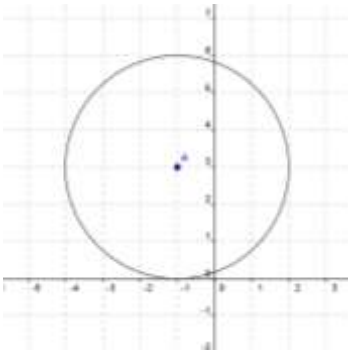
Solución:



2) Represente algebraicamente la circunferencia de centro A(2,-3) y radio 4.

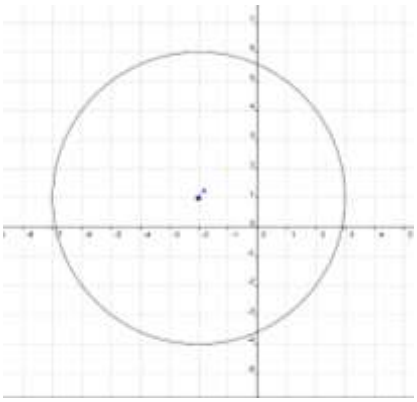
Solución: $(x - 2^2 + (y + 3)^2 = 16$

3) A partir de la representación gráfica que se le presenta, indique el centro y el radio de la circunferencia.



Solución: Centro (-1, 3), Radio 3

4) A partir de la representación gráfica que se le presenta, indique la ecuación de la circunferencia.



Solución:

$$(x + 2^2 + (y - 1)^2 = 25$$

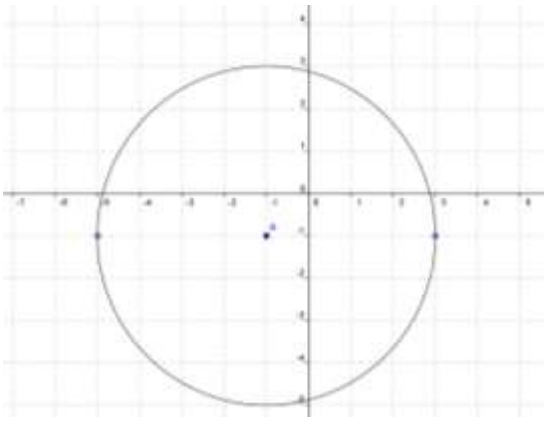
5)
6)
7)

8) Los extremos del **diámetro de una** circunferencia son los puntos A(-5,-1) y B(3,-1). ¿Cuál es la ecuación de esta circunferencia?

Solución:

Se obtienen las coordenadas del punto medio, que corresponde al centro de la circunferencia.

$$\left(\frac{-5+3}{2}, \frac{-1+-1}{2}\right) = (-1,-1)$$



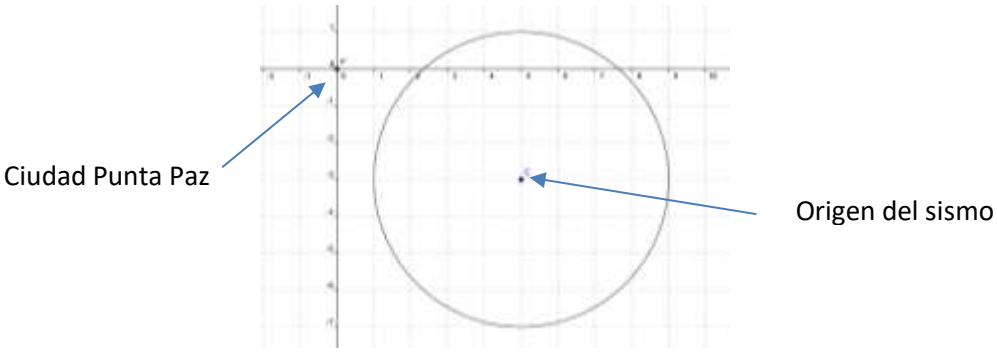
El diámetro tiene una longitud de 8, por lo que el radio mide 4

Ecuación $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 16$

9) Un servicio de sismología, detectó un sismo con origen, 5 km este y 3 sur del centro de la ciudad de Punta Luz, con un radio de 4 km a la redonda ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia del área afectada? Utilizando esta ecuación es posible que el sismo haya afectado el centro de la ciudad de Punta Luz.

Solución:

Podemos colocar el centro de la ciudad Punta Luz, en cualquier punto del plano cartesiano, por comodidad, lo colocamos en el origen (0,0).



Ecuación de la circunferencia: $(x-5)^2 + (y+3)^2 = 16$

Para determinar, utilizando esta ecuación es posible que el sismo haya afectado el centro de la ciudad de Punta Luz, y como la ciudad la colocamos en el punto (0,0), se sustituyen esos valores en la ecuación:

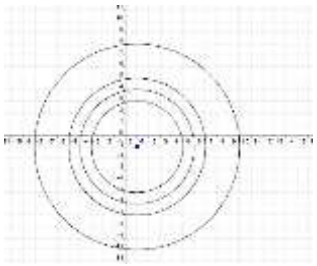
$$(0-5)^2+(0+3)^2 \text{ ¿?} 16$$
$$25+9>16$$

Como el dato del lado derecho es mayor que el del lado izquierdo, la ciudad está fuera de la circunferencia, por lo tanto, el sismo no la afecto.

10) Halle la ecuación de una circunferencia cuyo centro es (1, -1), y pasa por el punto (3, 5)

Solución:

Como ya se tiene el centro, solo hace falta el radio para determinar la ecuación de la circunferencia Si el centro es (1,-1) y pasa por el punto (3,5), significa que la distancia entre estos puntos es el radio de la circunferencia.



$$d=\sqrt{(3-1)^2+(5--1)^2}$$
$$d=\sqrt{2^2+6^2}=\sqrt{40}$$

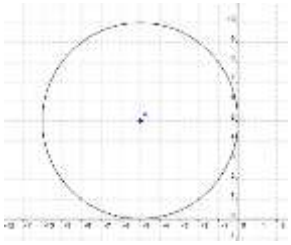
Entonces, la ecuación de la circunferencia es

$$(x-1)^2+(y+1)^2=40$$

11) El área de una circunferencia en 25π encuentra la ecuación general si es tangente a los ejes coordenados en el segundo cuadrante

Solución:

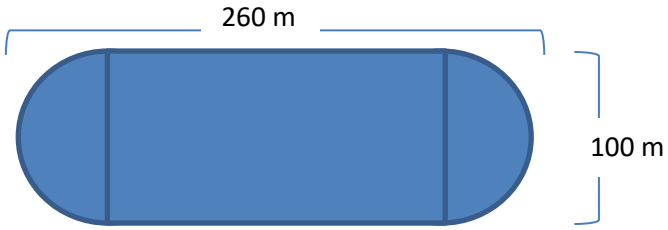
Es posible, para tratar de visualizar una forma de dar respuesta, iniciar por una representación gráfica, que contemple las condiciones de lo planteado.
Además si el área es 25π, tenemos que el radio es 5, pues $A=\pi r^2=25\pi$
Con ello se observa que el centro de la circunferencia debe ser (-5,5).



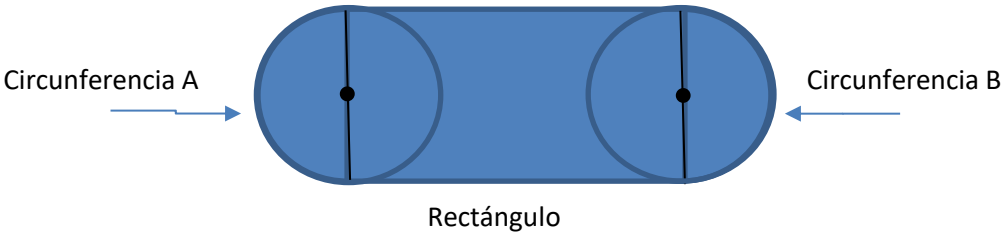
Por tanto la ecuación es

$$(x+5)^2+(y-5)^2=25$$

12) Se conoce que las dimensiones en la parte interna de una pista de atletismo son como se muestra en la figura



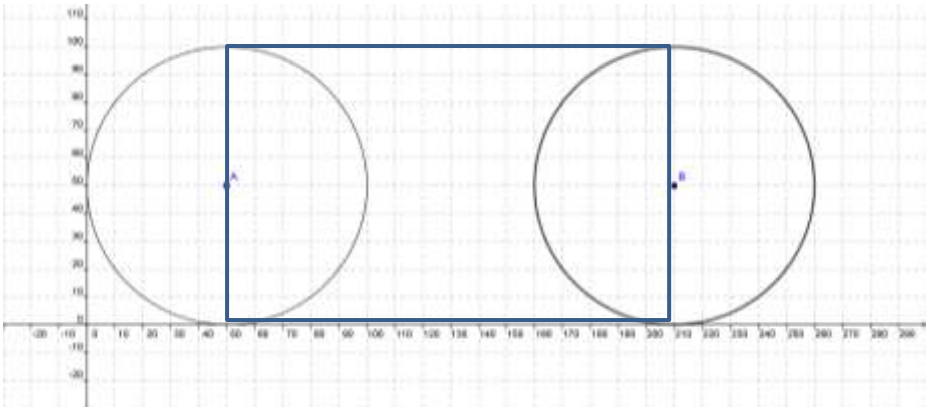
Con el propósito de realizar algunas mejoras, un joven la dibuja sobre un plano cartesiano, para lo cual la descompone que se muestra en la figura



Si el centro de la circunferencia A lo ubica en el punto (50,50) ¿Dónde se ubicaría el centro de la circunferencia B?

Solución:

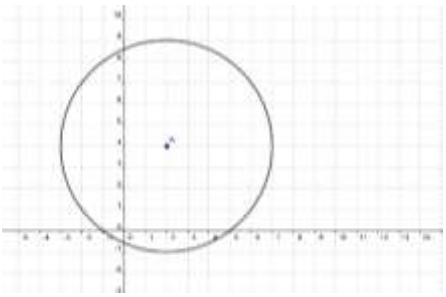
Según las dimensiones indicadas, si el diámetro de las circunferencias es 100m, el radio debe ser 50 m y la distancia entre los centros de las circunferencias debe ser 60m, por la circunferencia B se dibujaría con centro 160 m a la derecha, una representación sería con centro (210, 50) y radio 50



13) Dado el punto N(2,4) y la circunferencia C:=$(x-2)^2+(y-4)^2=25$. Determine el área del triángulo suyos vértices son N, y las intersecciones de C con el eje de las abscisas.

Solución:

La representación gráfica nos da una idea de cuáles son las coordenadas de los puntos donde se interseca C con el eje de las abscisas.



Para no dejar a la intuición el resultado, se resuelve de forma algebraica, considere que cualquier punto sobre el eje de las abscisas tiene coordinadas (x, 0), por lo que al tomar estos valores en la ecuación de la circunferencia, se reduce a resolver la ecuación

$(x-2)^2+(0-4)^2=25$

$x^2-4x+4+16=25$

$x^2-4x-5=0$

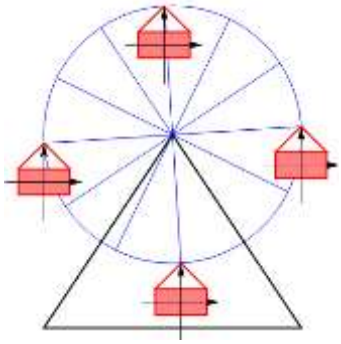
$x=5$ y $x=-1$

Es decir los vértices del triángulo son (0,-1), (0,5), (2,4).

Con ello se obtiene que la base del triángulo es 6 y altura 4, por lo que el área es $\frac{b\cdot h}{2}=\frac{6\cdot 4}{2}=12$

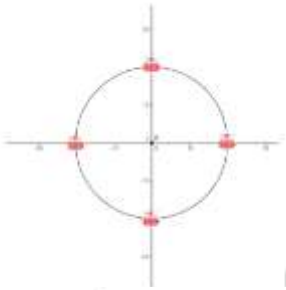
El área del triángulo es 12

14) El dibujo adjunto representa una rueda de chicago, con diámetro interior de la circunferencia de 20 metros, si se coloca el centro de la circunferencia en el origen de un plano cartesiano, cuáles son las coordenadas de los puntos donde están los carritos

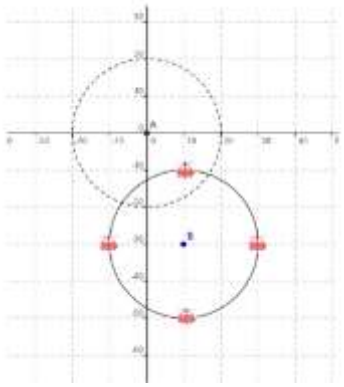


Si se traslada el centro de la circunferencia al punto (10,-30), a que puntos se trasladan cada uno de los carritos.

Solución:



Las coordenadas de los puntos donde están los carritos son (0,20), (20,0), (0,-20), (-20,0)



Si se traslada el centro de la circunferencia al punto (10,-30), los puntos a los que se trasladan cada uno de los carritos son (10, -10), (30,-30), (10, -50), (-10, -30)

Otra forma de resolverlo es, si se traslada el centro al punto (10, -30), significa que cada punto de la circunferencia se traslada, 10 unidades a la derecha y 30 unidades hacia abajo, por lo que, a cada punto en la coordenada “x”, se suman 10 unidades y en la coordenada “y” se restan 30 unidades:

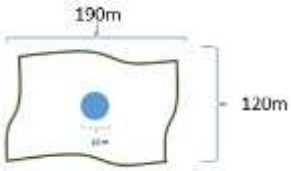
El punto (0,20) al trasladarlo sería (0+10. 20-30) = (10,-10)

El punto (20,0) al trasladarlo sería (20+10. 0-30) = (30,-30)

El punto (0,-20) al trasladarlo sería (0+10. -20-30) = (10,-50)

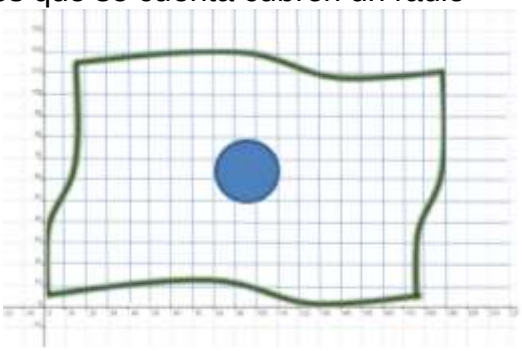
El punto (-20,0) al trasladarlo sería (-20+10. 0-30) = (-10,-30)

15) En el pueblo de Corona hay un parque como el que se muestra en la figura, tiene un lago en el centro de forma circular y con diámetro 30 m, el resto del parque es zona verde.



Se desean colocar aspersores de agua para regar la zona verde, los aspersores con los que se cuenta cubren un radio máximo de 40 metros.

Para analizar la situación el encargado del parque, representa la situación en un plano cartesiano, colocando una de las esquinas en el origen del plano, como muestra la figura.

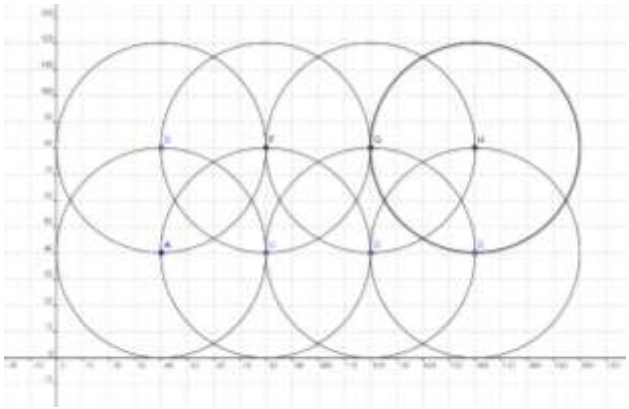


Utilizando las coordenadas del plano:

d) sugiera al encargado del parque, dónde colocar aspersores. Justifique su respuesta.
e) si se solicita que los aspersores no rieguen el lago, sugiera dónde colocarlos. Justifique su respuesta.
f) si solamente se cuenta con 1 aspersor, el cual debe trasladarse cada cierto tiempo, y el encargado lo coloca en un primer tiempo, en el punto (40,40), cuántos metros hacia arriba, abajo, derecha o izquierda, debe trasladarse el aspersor para trasladarlo en un segundo momento. Justifique su respuesta.

Solución:

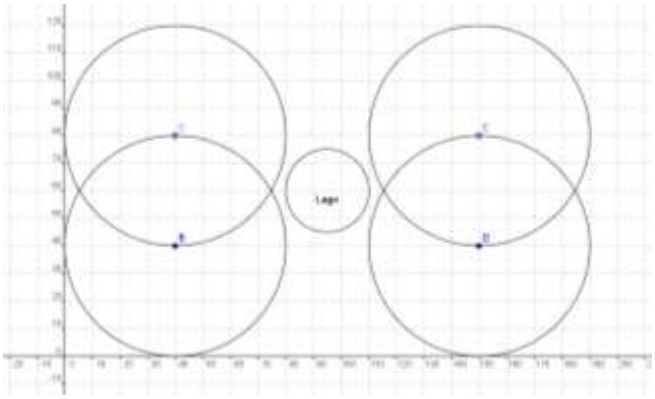
a) Este ejercicio tiene varias posibles respuestas, una de ellas, considera que para un mejor riego los aspersores deben “traslaparse” en su radio de cobertura.



Por lo que los aspersores se colocan en por los puntos con coordenadas

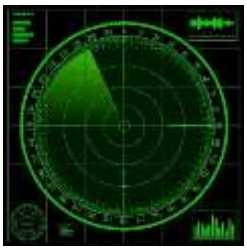
(40,40), (80,40), (120,40), (160,40), (40,80), (80,80), (120,80), (160,80)

b) Este ejercicio también tiene varias soluciones, en este caso se sugiere colocar los aspersores en los puntos con coordenadas (40,40), (40,80), (150,40), (150, 80). Se considera colocarlos a una distancia de 40 metros de los bordes del parque.



c) Si solamente se cuenta con 1 aspersor, que se coloca en primer lugar, según el dibujo anterior, en el punto B(40,40), y se debe llevar en segundo lugar al punto “C”, se debe mover 40 metros hacia arriba.

16) Un avión tiene un radar, que en determinado momento tiene un alcance máximo de 5000 metros, para realizar un estudio, un observador dibuja la situación en el plano cartesiano, colocando el punto de observación en el origen.
Si el avión transita por el punto de coordenadas A(15000, 12000), escriba la ecuación que representa el alcance del radar.



Si una montaña se ubica en el punto M(8000, 6000) ¿Es posible que la montaña sea detectada por el radar del avión, cuando el mismo transita por el punto A(15000, 12000)? Resuelva de manera algebraica.

¿Cuál es una posible posición del avión, para que el observador quede dentro del área de alcance del radar? Indique cuál debe ser la traslación del avión, desde la posición A(15000, 12000), hasta la posición del ejercicio “b” (donde el observador queda alcance del radar).

Solución:

a) $(x-15000)^2+(y-12000)^2=25\,000\,000$

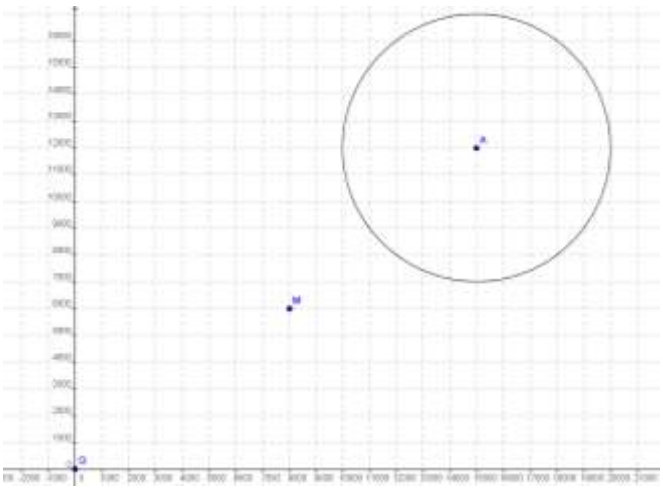
b) $(8000-15000)^2+(6000-12000)^2 \quad ¿? \quad 25\,000\,000$

$(-7000)^2 + (-6000)^2 \quad ¿? \quad 25\,000\,000$

$49\,000\,000 + 36\,000\,000 \quad ¿? \quad 25\,000\,000$

$85\,000\,000 > 25\,000\,000$

Por lo que el punto (100,100) está fuera de la circunferencia y por tanto NO está al alcance del radar.



c) Esta pregunta tiene varias respuestas, una de ella es que el avión puede estar en la posición T(0, 5000), es decir debe ir a la izquierda 15000 metros y hacia abajo 7000 metros. Es decir

(15000 - 15000, 12000-7000) = (0,5000)